Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$, on considère le plan (P) passant le pont A(0 , 1 , 1) et dont $\vec{u}(1\,,0\,,-1)$ est un vecteur normal et la sphère de (S) de centre le point Ω(0 , 1 , -1) et de rayon $\sqrt{2}$

0,5 1) a) Montrer que : $x-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (P)

0,75 b) Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que B(-1 , 1 , 0) est le point de contact

0,25 2) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P)

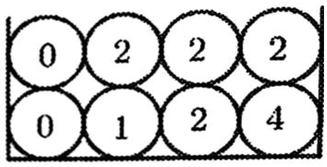
0,75 b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) au point C(1 , 1 , 0)

0,75 3) Montrer que : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OCB

Exercice 2 (3 points) :

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher portant chacune un Nombre comme indiqué sur la figure ci-contre

On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne



1,5 1) Soit A l'événement : « Parmi les trois boules tirées, aucune boule ne porte le nombre 0 »

Et B l'événement : « Le produit des nombres portées par les trois boules tirées est égale à 8 »

Montrer que : $p(A)=\frac{5}{14}$ *et que* $p(B)=\frac{1}{7}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à cheque tirage associe le produit des nombres par les trois boules tirées

0,5 a) Montrer que : $p(X=16)=\frac{3}{28}$*

1 b) le tableau ci-contre concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Recopier sur votre copie et compléter le tableau

En justifier chaque réponse

x_i	0	4	8	16
$p(X=x_i)$				$\frac{3}{28}$

Exercice 3 (3 points) :

On considère les nombres complexe a et b tels que : $a=\sqrt{3}+i$ *et* $b=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$

0,25 1) a) Vérifier que : $b=(1+i)a$

0,5 b) En déduire que : $|b|=2\sqrt{2}$ et que : $\arg b\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

0,5 c) Déduire de ce qui précède que : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

	2) le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a et b et le point C d'affixe c telle que : $c = -1 + i\sqrt{3}$
0,75	a) Vérifier que : $c = ia$ et en déduire que OA = OC et que : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
0,5	b) Montrer que le point B est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$
0,5	c) En déduire que le quadrilatère OABC est un carré

Problème (11 points) :

I. Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln(x)$

0,25 1) Vérifier que : $g(1) = 0$

1 2) A partir du tableau de variations de la fonction g ci-dessous
Montrer que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,1]$ et que $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, +\infty[$

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
g'(x)	+
g(x)	$-\infty$ ↗ $+\infty$

II. On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln(x)$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ (unité : 1 cm)

0,5 1) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ 0 > 0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat

0,25 2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

0,75 b) Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptote celle de la droite (D) d'équation y = x

1 3) a) Montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$

0,75 b) Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$

0,25 c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$

0,5 4) a) Résoudre dans l'intervalle l'équation : $\left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln(x) = 0$

0,5 b) En déduire que la courbe (C_f) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées

0,75 c) Montrer que : $f(x) \leq x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1,2]$ et en déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) sur l'intervalle $[1,2]$

1 5) Construire, dans le même repère $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$, la droite (D) et la courbe (C_f) (on admet la courbe (C_f) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2,4 et 2,5)

0,5 6) a) Montrer que : $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\, dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

0,25 b) Montre que la fonction : $H : x \mapsto 2\ln(x) - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$

0,5 c) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln(x)dx = (1 - \ln(2))^2$

0,5 d) Calculer, en cm², l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite (D) et les droites d'équations : x = 1 et x = 2

III. On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n

0,5 1) Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier n

0,5 2) Montrer que la suite (u_n)est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question II)4)c))

0,75 3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite